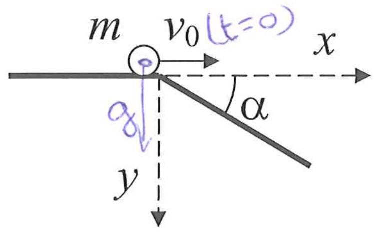
Tentamen Mechanica, 24 augustus 2009, 9.00-12.00 uur
Maak elke opgave op een apart vel
Schrijf je naam en studentnummer op elk vel
Cijfer = Σ(punten)/3

Opgave 1: Kogelbaan

Een projectiel met massa m ligt bovenaan een helling die een hoek α met het horizontale vlak maakt. De zwaartekrachtsversnelling g is loodrecht op het horizontale vlak naar beneden gericht. Op tijdstip t=0 wordt het projectiel met snelheid v_0 horizontaal weggeschoten. Neem de oorspong van het coördinatenstelsel bovenaan de helling en kies de x-as positief naar rechts; de y-as positief naar beneden.



We verwaarlozen in eerste instantie wrijving door de lucht.

1p a) Geef de bewegingsvergelijkingen (tweede wet van Newton) voor de beide coördinaten.

1p b) Bepaal hieruit x(t) en y(t) zolang het projectiel in de lucht is.

2p c) Bepaal het tijdstip waarop het projectiel de helling raakt en de x-coördinaat op dat moment.

Nu nemen we aan dat er lineaire wrijving is, met een kracht gegeven door **F**= - γm**v**, waarbij **v** de snelheid is en γ een constante.

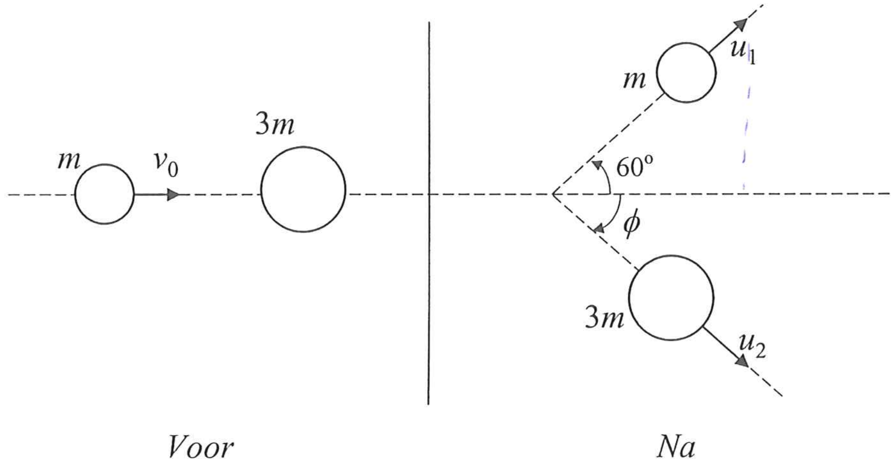
1p d) Geef opnieuw de bewegingsvergelijkingen.

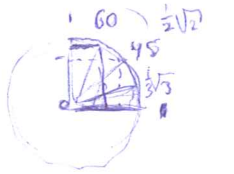
3p e) Bepaal uit deze vergelijkingen de snelheden in de x- en de y-richting als functie van de tijd (zolang het projectiel in de lucht is).

1p f) Bepaal nu de positie als functie van de tijd (zolang het projectiel in de lucht is).

1p g) Als de helling steil is, zal het projectiel de kans krijgen in de lucht een eindsnelheid te bereiken. Wat die snelheid (grootte en richting)? Laat zien dat deze volgt uit een eenvoudig krachtenevenwicht.

Opgave 2: Elastische botsing *(neem een nieuw vel papier voor deze som)*





Biljartbal 1 met massa m botst met een snelheid v_0 tegen een stilliggende biljartbal 2 met massa $3m$ (gezien vanuit het laboratorium stelsel). Na de botsing heeft biljartbal 1 een snelheid u_1 en maakt een hoek van 60° met de oorspronkelijke bewegingsrichting. Biljartbal 2 heeft een snelheid u_2 en maakt een hoek ϕ met de oorspronkelijke bewegingsrichting. De botsing kan als puur elastisch worden verondersteld.

2p a) Welke behoudswetten gelden er? Schrijf ze uit in termen van m, v_0, u_1, u_2 en ϕ.

4p b) Bepaal u_1 en u_2 als functie van v_0.

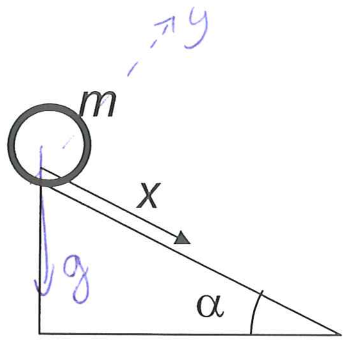
1p c) Bepaal ϕ.

1p d) Bepaal de snelheid van het zwaartepunt van het systeem van de twee biljartballen.

2p e) Bepaal de hoek die biljartbal 1 maakt met de oorspronkelijke bewegingsrichting gemeten in het zwaartepuntstelsel.

Opgave 3: Rollende cylinder *(neem een nieuw vel papier voor deze som)*

Een holle cylinder met massa m en straal R wordt op t=0 vanuit rust losgelaten bovenaan een hellend vlak, dat een hoek α maakt met de horizontaal. De zwaartekrachtsversnelling g wijst vertikaal naar beneden. Het hellend vlak is zo ruw dat op elk moment de cylinder in een slipvrije rol is. Noem de afstand die de cylinder langs het vlak aflegt x (positief in de neergaande richting).



1p a) Druk het relevante traagheidsmoment uit in gegeven grootheden. (Als je dit onderdeel niet kunt beantwoorden, houd het traagheidsmoment dan als onbekende in de rest van de opgave) .

1.5p b) Geef in een schets aan welke krachten er op de cylinder werken; geef duidelijk aan waar de krachten aangrijpen.

2p c) Geef de bewegingsvergelijkingen voor translatie en rotatie van de cylinder.

1p d) Geef de relatie tussen de hoeksnelheid $\dot{x}$ en de translatiesnelheid ω voor de slipvrije rol.

1.5p e) Bepaal nu de translatiesnelheid $\dot{x}$ en hoeksnelheid ω als functie van de tijd t..

1p f) Als de totale lengte van het vlak L is, wat is dan totale tijd T die de cylinder nodig heeft om deze lengte af te leggen?

2p g) We herhalen deze proef nu in een lift. Wat gebeurt er met T als
   (i) de lift met constante snelheid naar boven gaat?
   (ii) de lift met een opwaartse versnelling ter grootte A naar boven beweegt?
   (iii) de lift bij het naar boven gaan afremt, met een versnelling ter grootte A?